

Die Ergebnisse sind ^{14 *}

$$\alpha_0 = -0,618; \quad \alpha_1 = -0,548 \cdot 10^{-2}; \\ \alpha_2 = -0,837 \cdot 10^{-2} \text{ cm/dyn}. \quad (56)$$

Damit ist die Kehrmatrix für KCl berechnet. Wir geben zum Schluß nochmals ihre Definition an. Der Angriffspunkt der Einzelkraft sei der Punkt f . Dann wird die Kehrmatrix repräsentiert durch die drei Beziehungen

$$\begin{aligned} \xi_{fb}^{(fc)} &= \alpha_0 \delta_{bc}, & \xi_{m'b}^{(fc)} &= \alpha_1 S_{bc,1}(r_{mf}) \\ b &= 1, 2, 3 & \text{mit } (m-f, n-g, p-h) \\ &= (\pm 1, 0, 0); \quad (0, \pm 1, 0); \quad (0, 0, \pm 1), \\ \xi_{mb}^{(fc)} &= \alpha_2 S_{bc,1}(r_{mf}) & b &= 1, 2, 3 \quad \text{und } m \neq m'. \end{aligned}$$

* Anm. ¹⁴ siehe S. 293.

Dabei bedeutet c die Richtung der Einzelkraft, b die Komponente der Auslenkung, $S_{bc,1}(r_{mf})$ das System der Fundamentalintegrale (35). Die Faktoren α_σ entnehmen wir (38) bzw. (56).

Die Verwendung dieser Kehrmatrix bei komplizierten Störproblemen, die eine nichtlineare Rechnung erfordern, soll in späteren Arbeiten demonstriert werden.

Herrn Prof. E. FUES sagen wir herzlichen Dank für die freundliche Förderung dieser Arbeit. Außerdem gilt unser Dank Herrn Dr. H. STUMPF, der durch sein stete Kritik und durch wertvolle Anregungen diese Arbeit wesentlich mitbestimmt hat. Oberstudienrat A. WAHL verdanken wir die Berechnung des komplizierten Integrals (47).

Deformation und Quadrupolmomente leichter Kerne

Von ELMAR WINDTHORST

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität München
(Z. Naturforsch. 14 a, 294—305 [1959]; eingegangen am 26. November 1958)

Es wird untersucht, inwieweit im Schalenmodell mit deformierbarem Oszillatorkontakt bei Berücksichtigung von Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung und Konfigurationsmischungen eine nichtspärische Kernstruktur erklärt werden kann. Es ergeben sich bei den Kernen Li⁶, Li⁷, Be⁹ und N¹⁴ Deformationen, die in dem aus Quadrupolmomentmessungen erwarteten Bereich liegen. Gegenüber früheren Berechnungen wurde eine Verbesserung der Werte des Quadrupolmomentes erzielt.

Der Erfolg des Schalenmodells bei der Erklärung der Eigenschaften von Atomkernen führte in einer Vielzahl von Arbeiten der vergangenen Jahre zu Erweiterungen des 1950 von GOEPPERT-MAYER¹ und HAXEL, JENSEN und SUESS² vorgeschlagenen Einteilchen-Schalenmodells. Durch Einbeziehung von Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen ergab sich eine gute Annäherung an die experimentellen Daten bei den magnetischen Momenten und den Spektren leichter Kerne³⁻⁸. Bindungsenergien und elektrische Quadrupolmomente konnten weniger gut erklärt werden.

In neuerer Zeit wurden in mehreren Arbeiten kollektive Effekte im Einteilchen-Schalenmodell untersucht⁹⁻¹⁰. Dabei wurde die Wechselwirkung eines Nukleons außerhalb einer abgeschlossenen Schale

mit dem Rumpf durch Berücksichtigung von Anregungskonfigurationen des Rumpfes beschrieben, deren schwache Beimischungen mittels Störungsrechnung bestimmt wurden, wobei die Störung die Differenz zwischen dem Einteilchen-Schalenmodellpotential und der Summe der Zweikörperwechselwirkung des Außennukleons mit den Nukleonen des Rumpfes ist.

Weiter wurden im Kollektivmodell¹¹ Rechnungen mit Einteilchen-Schalenmodell-Potentialen durchgeführt¹²⁻¹⁵. Das die Wirkung der Restnukleonen auf ein herausgegriffenes Teilchen beschreibende Potential wurde deformierbar angenommen und dessen Wirkung auf die Bindungszustände der Nukleonen untersucht. Dabei wird der vom Deformationsparameter abhängige Anteil des Potentials als Störung

¹ M. GOEPPERT-MAYER, Phys. Rev. **75**, 1969 [1949].

² O. HAXEL, H. D. JENSEN u. M. SUESS, Z. Phys. **128**, 295 [1950].

³ B. H. FLOWERS, Proc. Roy. Soc., Lond. A **212**, 248 [1952].

⁴ D. R. INGLIS, Phys. Rev. **87**, 915 [1952].

⁵ D. R. INGLIS, Rev. Mod. Phys. **25**, 390 [1953].

⁶ R. SCHULTEN, Z. Naturforsch. **8a**, 759 [1953].

⁷ D. KURATH, Phys. Rev. **101**, 216 [1956].

⁸ R. HÜPER, Z. Naturforschg. **12a**, 295 [1957].

⁹ R. D. AMADO, Phys. Rev. **108**, 1462 [1957].

¹⁰ R. D. AMADO u. R. J. BLIN-STOYLE, Proc. Phys. Soc., Lond. A **70**, 532 [1957].

¹¹ unified model.

¹² S. MOSZKOWSKI, Phys. Rev. **99**, 803 [1955].

¹³ K. GOTTFRIED, Phys. Rev. **103**, 1017 [1955].

¹⁴ E. B. PAUL, Phil. Mag. **2**, 311 [1957].

¹⁵ S. G. NILSSON, Dan. Mat. fys. Medd. **29**, 16 [1955].



behandelt. Die Diagonalisierung der Energiematrix ergibt die Eigenzustände in Abhängigkeit von der Deformation. Es gelingt, Spin und Parität bei stark deformierten Kernen im Bereich $150 \leq A \leq 190$ zu bestimmen. Ebenso führt die Anwendung bei leichten Kernen (F^{15} , Mg^{25}) zu Erfolgen bei der Erklärung von angeregten Niveaus als Rotationspektren. Nicht möglich war die Bestimmung der Gleichgewichtsdeformation.

Nach einer Arbeit von ELLIOTT¹⁶ ist es durch Untersuchung der Transformationseigenschaften von gemischten Konfigurationen möglich, kollektive Bewegungen aus Konfigurationswechselwirkungen abzuleiten.

Es ist daher von Interesse, zu untersuchen, inwie weit ein kollektiver Effekt, wie die aus den gemessenen elektrischen Quadrupolmomenten folgende nichtsphärische Struktur des Kerns, im Vierteilchen-Schalenmodell¹⁷ mit Konfigurationsmischung erklärt werden kann. Dies wird in der vorliegenden Arbeit bei einigen Kernen der 2 p-Schale untersucht.

Bei der Berechnung der Quadrupolmomente traten in den früheren Arbeiten größere Unterschiede auf (s. Tab. 1), die außerhalb der experimentellen Fehlerschranke liegen. Diese ist in ihrer nicht unerheblichen Größe durch die bekannte Schwierigkeit, das durch die Hüllenelektronen erzeugte elektrische Feld in der Umgebung des Kerns zu bestimmen, gegeben.

Kern	$Q_{\text{exp.}} \times 10^{-28} \text{ cm}^2$	$Q_{\text{th.}} (\text{SCHULTEN})$	$Q_{\text{th.}} (\text{HÜPER})$
Li^6	< + 0,09 (s. Anm. ¹⁸)		
Li^7	- 1,2 (s. Anm. ¹⁹)	+ 0,4	+ 0,56
Be^9	+ 2 ± 2 (s. Anm. ¹⁸)	+ 5,4	- 1,7
B^10	+ 2 (s. Anm. ²⁰)		
B^11	+ 6 ± 4 (s. Anm. ²¹)	+ 12	
N^{14}	+ 3 ± 2 (s. Anm. ²¹)		
	+ 3,55 (s. Anm. ¹⁹)		
	+ 2 (s. Anm. ²²)	+ 0,9	- 0,4

Tab. 1.

Hier wird nun versucht, zu einer genaueren Bestimmung der Quadrupolmomente zu kommen und einen Einblick in das Deformationsverhalten leichter Kerne zu gewinnen.

¹⁶ J. P. ELLIOTT, Proc. Roy. Soc., Lond. A **245**, 128 u. 562 [1958].

¹⁷ In der engl. Literatur „many particle-shell model“ genannt.

¹⁸ P. KUSCH, Phys. Rev. **75**, 887 [1949].

¹⁹ H. KOPFERMANN, Kernmomente, Akad. Verl.-Ges., Frankfurt 1956.

Dazu werden

1. zur Herleitung der Einteilchenfunktionen ein deformierbares Oszillatorenpotential angenommen,
2. die Mischungskoeffizienten der Einteilchen-Konfigurationen, die die Kerneigenfunktion aufbauen, bei der energetisch günstigsten Deformation bestimmt.

In den Arbeiten über leichte Kerne³⁻⁸ wurde angenommen, daß die Wirkung der Restnukleonen auf ein herausgegriffenes durch ein sphärisch symmetrisches Oszillatorenpotential gut beschrieben wird. Dies folgt aus den Grundvoraussetzungen des Schalenmodells und der empirischen DichteVerteilung leichter Kerne (HOFSTADTER et al.²³) und kann im Bereich $A < 20$ als gute Näherung angesehen werden.

Hier wird die Möglichkeit untersucht, daß das gemeinsame Potential eine Abweichung von der sphärischen Symmetrie besitzt. Dies ist naheliegend, da die DichteVerteilung der Nukleonen im sphärischen Oszillatortopf bei nicht abgeschlossenen Schalen eine Asymmetrie aufweist, die für den Protonen-Anteil zum Schalenmodellwert des elektrischen Quadrupolmoments führt (s. Tab. 1, Spalte 3 u. 4). Die Größe der sich einstellenden Potential-Deformation und die dazugehörige DichteVerteilung der Nukleonen wird hier folgendermaßen bestimmt: Die aus dem Einteilchenmodell mit unsymmetrischem Potentialtopf erhaltenen Funktionen (Abschnitt 1), in denen ein Deformationsparameter auftritt, werden nach dem Verfahren der Konfigurationsmischung³⁻⁴ zu Näherungsfunktionen des Kerns zusammengestellt (Abschnitt 2). Mit diesen wird der Erwartungswert der Gesamtenergie gebildet, unter der Annahme, daß die energetischen Verhältnisse im Kern in guter Näherung durch rein anziehende Zweikörperkräfte beschrieben werden, wenn man die Absättigung der Dichte durch die Nebenbedingung der Volumenkonstanz berücksichtigt. Die Wechselwirkung der Nukleonen wird dabei als Summe von Zentralkräften mit Direkt- und Austausch-Anteilen sowie einer Zweiteilchen-Spin-Bahn-Kopplung angesetzt. Stärke und Reichweite der einzelnen Kraftanteile werden aus den Nukleon-Nukleon-Streudaten nie-

²⁰ W. D. KNIGHT, Phys. Rev. **92**, 539 A [1953].

²¹ J. E. MACK, Rev. Mod. Phys. **22**, 64 [1950].

²² C. H. TOWNES u. Mitarb., J. Chem. Phys. **17**, 782 [1949].

²³ R. HOFSTADTER, Rev. Mod. Phys. **28**, 214 [1956].

derer Energie, den Daten des Deuterons und aus der experimentell bekannten Energiedifferenz der beiden virtuellen Niveaus in den Streuzuständen von He⁵ bestimmt. Außerdem wurden die Rechnungen mit einer Spin – Bahn-Kopplung wiederholt, mit deren Tiefe und Reichweite nach einer neueren Arbeit⁸ bei der Berechnung der angeregten Niveaus leichter Kerne günstige Ergebnisse erzielt wurden (Abschnitt 3). Die Lösung des Eigenwertproblems bei verschiedenen Werten des Deformationsparameters liefert den Gang der Energie des Kerns in Abhängigkeit von der Deformation. Der zum Energieminimum gehörende Parameterwert beschreibt dann die Deformation des Kerns. Die zugehörigen Wellenfunktionen werden zur Berechnung des Erwartungswerts des elektrischen Quadrupolmoments benutzt (Abschnitt 4).

1. Die Eigenfunktionen des deformierten Oszillators

Der HAMILTON-Operator des volumenkonstant und rotationssymmetrisch deformierbaren Oszillatoren-potentials im Einteilchenmodell ist

$$\bar{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 (D x^2 + D y^2 + D^{-2} z^2). \quad (1.1)$$

Wir führen die Parameter

$$\lambda = \frac{m \omega}{\hbar} D^{1/2}, \quad \lambda_z = \frac{m \omega}{\hbar} D^{-1} \quad (1.2)$$

ein. Das Eigenwertproblem

$$\bar{H} \varphi = E \varphi \quad (1.3)$$

ist separierbar und liefert die normierten Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} \varphi_{n_x+n_y, n_z} &= \left(\frac{1}{2^n n_x! n_y! n_z!} \right)^{1/2} V\lambda \left(\frac{\lambda_z}{\pi^3} \right)^{1/4} \\ &\quad \exp[-\frac{1}{2} \lambda (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \lambda_z \cdot z^2] \\ &\quad \cdot \mathcal{H}_{n_x}(V\lambda x) \mathcal{H}_{n_y}(V\lambda y) \mathcal{H}_{n_z}(V\lambda_z z) \\ (\mathcal{H}) &= \text{HERMITESche Polynome} \end{aligned} \quad (1.4)$$

zum Eigenwert

$$E_{n_x+n_y, n_z} = \hbar \omega [D^{1/2} (n_x + n_y) + D^{-1} n_z + \frac{3}{2}]. \quad (1.5)$$

Da bei den in der Arbeit berechneten Kernen eine Deformation erwartet wurde, die nahe $D=1$ liegt, wurden bei der Rechnung Einteilchenfunktionen benutzt, die im Grenzfall $D=1$ in die Eigenfunktionen

des kugelsymmetrischen Oszillators übergehen²⁴ (Tab. 2).

Es lassen sich folgende Funktionen für die Zustände der s- und p-Schale aufbauen:

$$\begin{aligned} \varphi_{01} &= \delta^+ f, \quad \varphi_{0-1} = \delta^- f, \\ \varphi_{33} &= \delta^+ V\lambda (x+i y) f, \\ \varphi_{31} &= \sqrt{\frac{\lambda \lambda_z}{\lambda_z + 2 \lambda}} [\delta^-(x+i y) - \delta^+ 2 z] f, \\ \varphi_{3-1} &= \sqrt{\frac{\lambda \lambda_z}{\lambda_z + 2 \lambda}} [\delta^+(x-i y) + \delta^- 2 z] f, \\ \varphi_{3-3} &= \delta^- V\lambda (x-i y) f, \\ \varphi_{11} &= \sqrt{\frac{2 \lambda \lambda_z}{\lambda + 2 \lambda_z}} [\delta^-(x+i y) + \delta^+ 2 z] f, \\ \varphi_{1-1} &= \sqrt{\frac{2 \lambda \lambda_z}{\lambda + 2 \lambda_z}} [\delta^+(x-i y) - \delta^- z] f, \\ f &= V\lambda \left(\frac{\lambda_z}{\pi^3} \right)^{1/4} \exp[-\frac{1}{2} \lambda (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \lambda_z \cdot z^2] \end{aligned}$$

Tab. 2.

Dabei bezeichnet der erste Index 2 j , der zweite 2 j_z . Der Index 2 j wurde beibehalten, obwohl der Einteilchendrehimpuls nicht erhalten bleibt (Wandwechselwirkung), er bezeichnet also nur bei $D=1$ eine Quantenzahl. Bei der Zusammenstellung wurden Glieder mit dem Faktor $\lambda - \lambda_z$ vernachlässigt (s. a. Anhang).

2. Rechenmethode und Aufstellung der Näherungsfunktionen

Um die Eigenwerte und Eigenfunktionen des HAMILTON-Operators

$$\bar{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^A \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \sum_{k=1}^A V(i, k) \quad (2.1)$$

zu finden, ist die Eigenwertgleichung

$$\bar{H} \Psi = E \Psi \quad (2.2)$$

zu lösen. Dazu macht man die Entwicklung

$$\Psi = \sum_{n=1}^f c_n \Phi_n, \quad (2.3)$$

²⁴ Einer Stauchung des Potentialellipsoide, die durch $(a^2 - R_0^2)/R_0^2$ definiert ist (a =kleine Halbachse des Ellipsoide, R_0 =Radius bei $D=1$), von 6% entspricht bei Li⁶ eine Änderung des mittleren quadratischen Radius der DichteVerteilung um 0,8%.

wobei die Φ_n Funktionen sind, die bestimmten Konfigurationen (charakterisiert durch den Index n) entsprechen. Sie lassen sich durch die Einteilchenfunktionen der Tab. 2 als antisymmetrisiertes Produkt (SLATER-Determinante) darstellen. Die Beschränkung auf f Funktionen muß aus physikalischen Überlegungen gerechtfertigt werden. Die Koeffizienten c_n werden durch Diagonalisierung der Matrix (H_{mn}) bestimmt, unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen, die aus der Drehinvarianz von H im Isotopenspinraum folgen, sowie aus der Forderung, daß Ψ näherungsweise eine Eigenfunktion des Drehimpulsoperators ist. Der Einfluß dieser Näherung auf die Größe der Mischungskoeffizienten c_n ist im Anhang genauer untersucht. Wegen des zu erwartenden kleinen Trägheitsmomentes ist die Anregungswahrscheinlichkeit von Rotationszuständen sehr klein.

Unter den vielen möglichen Funktionen Φ_n wurde folgende Auswahl getroffen:

1. Die Summe der z -Komponenten der Gesamtdrehimpulse j der Einteilchenfunktionen soll dem gemessenen Spin des Kerns gleich sein (jj -Darstellung).

$$\bar{J}_z = \bar{j}_{z_1} + \bar{j}_{z_2} + \dots + \bar{j}_{z_n} = J_{\text{exp}}, \quad (2.4)$$

\bar{J}_z = z -Komponente des Gesamtdrehimpulses der durch Φ_n beschriebenen Konfiguration.

2. Es wurden nur Einteilenzustände der s- und p-Schale berücksichtigt.

Die Nichtberücksichtigung von Konfigurationen, die Teilenzustände aus höheren Schalen enthalten, wird oft damit begründet, daß bei störungstheoretischer Behandlung der Energienenner für höhere Schalen so groß ist, daß die Beimischung dieser Konfigurationen bei der Berechnung des Grundzustandes und der ersten Anregungsniveaus in guter Näherung vernachlässigt werden kann.

Nun ist aber daran zu erinnern, daß die uneingeschränkte Berücksichtigung von Konfigurationen, d. i.

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n, \quad (2.5)$$

die zur exakten Eigenlösung des HAMILTON-Operators Gl. (2.1) führt, ein extrem schlechtes Ergebnis bei der Berechnung der Bindungsenergie liefert, nämlich das Zusammenrutschen des Kerns auf den Radius $b/2$ der Kernkräfte, da der benutzte HAMILTON-Operator keine Absättigung liefert. Da anderer-

seits die teilweise Berücksichtigung von Konfigurationsmischungen nach früheren Arbeiten³⁻⁸ und auch der vorliegenden bessere Ergebnisse als die alleinige Mitnahme der Grundkonfiguration ergibt, scheint dieses Vorgehen als Arbeitshypothese ge-rechtfertigt zu sein.

3. Die Wechselwirkung der Nukleonen

Für die Wechselwirkung der Nukleonen wurde folgender Ansatz gemacht:

$$V = V_{12}(r_{12}) [W + M P_M + B P_B + H P_H] + V_{\text{SB}} + V_c. \quad (3.1)$$

Dabei ist $V(r_{12})$ der Radialanteil des Wechselwirkungspotentials, für den ein GAUSS-Potential angenommen wurde.

$$V(r_{12}) = -V_0 e^{-\beta r_{12}^2}, \quad r_{12}^2 = (r_1 - r_2)^2, \quad (3.2)$$

W , M , B und H sind die Konstanten der WIGNER-, MAJORANA-, BARTLETT- und HEISENBERG-Kraft. P_M , P_B , P_H sind die bekannten Austauschoperatoren für Ort, Spin und Ladung. V_c ist das COULOMB-Potential.

Der Ansatz für die Spin – Bahn-Kopplung ist

$$V_{\text{SB}} = i \propto V_0 e^{-\beta' r_{12}^2} (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2) [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\nabla_1 - \nabla_2)]. \quad (3.3)$$

Dieser Ansatz erfüllt die Forderung der GALILEI-Invarianz im Gegensatz zu dem von GAUS²⁵ eingeführten, der in einer früheren Arbeit⁶ verwendet wurde. Die hierdurch hervorgerufene Änderung der Matrixelemente der Spin – Bahn-Wechselwirkung für den Fall der Deformation Null ist bei HÜPER⁸ diskutiert. Eine Tensorkraft wird nicht berücksichtigt.

Es sind bei diesem Kraftansatz folgende Parameter aus den experimentellen Daten zu bestimmen:

$$V_0, \beta, M, W, B, H, \beta' \text{ und } \propto.$$

Die ersten sechs Werte wurden einer Arbeit von LEDERER²⁶ entnommen, die folgende experimentelle Daten zu ihrer Festlegung benutzt:

1. Die Symmetrie um 90° des differentiellen Wirkungsquerschnitts der Neutron-Proton-Streuung bei 40, 90 und 260 MeV.
2. Den Wert des Streuquerschnitts σ_{np} bei $E_{\text{lab}} \rightarrow 0$ (ohne chemische Bindung).
3. Die kohärente Streuung langsamer Neutronen an gebundenen Protonen.
4. Die Bindungsenergie des Deuterons.

²⁵ H. GAUS, Z. Naturforschg. 4 a, 721 [1949].

²⁶ Diplomarbeit, München 1955.

5. Den totalen Streuquerschnitt $\sigma_{np} = f(E)$ für $E < 6$ MeV.

Es ergaben sich die Werte

$$V_0 = \begin{cases} 68,6 \pm 5,5 \text{ MeV} & \text{Triplet-Spinzustand,} \\ 44,0 \pm 4,4 \text{ MeV} & \text{Singulett-Spinzustand,} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\beta_s = \beta_t = 4,13 \cdot 10^{-25} \text{ cm}, \quad (3.5)$$

$$W = M = 0,410, \quad B = H = 0,090. \quad (3.6)$$

Der Wert für α wurde aus der experimentell bekannten Energiedifferenz der beiden virtuellen Niveaus in den Streuzuständen des He^5 bestimmt. Es ergab sich der Wert $\alpha = 0,04$. Ein von H. v. SIEMENS (Dissertation, München 1958) errechneter Wert bei O^{17} ergab $\alpha = 0,035$. Der zweite Wert der Spin-Bahn-Kopplung wurde nach einer früheren Arbeit⁸ zu $\alpha V_0^2 = -1,29$ MeV mit der Reichweite $(\beta')^{-1/2} = 3,8 \cdot 10^{-13}$ cm gewählt ($\alpha V_0^{-1} = -2,744$ MeV). Nach ELLIOTT und LANE²⁷ entspricht in der 2 p-Schale die Zweikörper-Spin-Bahn-Wechselwirkung einer effektiven Einteilchen-Spin-Bahn-Wechselwirkung $a \cdot (\vec{l} \cdot \vec{s})$, wobei a zwischen He^5 und N^{15} stetig zunimmt (s. a. Anm.²⁸). Der *intermediate-coupling*-Parameter a/K ist nach KURATH +1,3 für Li^6 und +5 für N^{14} . Die mit den hier benutzten Konstanten der Kräfte berechneten Werte des Parameters liegen in diesem Bereich (s. a. Anm.²⁹).

Es ist nun noch der Parameter λ zu bestimmen, der die Weite des Oszillatortopfes für den jeweiligen Kern bestimmt. Von seinem Wert hängt entscheidend die Größe der Bindungsenergie ab. Er wurde aus der Energiedifferenz von Spiegelkernen errechnet.

Tab. 3 zeigt die so bestimmten λ -Werte für Kerne der p-Schale.

A	7	9	11	13	15
$\lambda \times 10^{25}$	4,244	2,960	4,312	3,644	3,570

Tab. 3.

4. Die Berechnung der Energie und des Quadrupolmomentes

Mit den in Abschnitt 2 aufgestellten Näherungsfunktionen

$$\Psi = \sum_{n=1}^f c_n \Phi_n \quad (4.1)$$

²⁷ A. M. LANE u. J. P. ELLIOTT, Phys. Rev. **96**, 1160 [1954].

²⁸ J. HUGHES u. K. T. LE COUTEUR, Proc. Phys. Soc., Lond. A **63**, 1219 [1950].

und den in Abschnitt 3 angeführten Daten der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wurden für verschiedene Kerne der 2 p-Schale die Bindungsenergien berechnet, wobei für den in den Einteilchenfunktionen auftretenden Deformationsparameter D verschiedene Werte angenommen wurden. Die so bestimmten Matrixelemente sind im Anhang 1 bis 3 in I³⁰ aufgeführt. Sie sind Funktionen der Parameter $v = \lambda/\beta$ und $v_z = \lambda_z/\beta$.

Das elektrische Quadrupolmoment des Kerns ist definiert durch den Erwartungswert des Operators

$$Q = \sum_{i=1}^A \frac{1}{2} (1 + \tau_3) (3 z_i^2 - r_i^2), \quad (4.2)$$

wo τ_3 die 3. Komponente des Isotopenspinvektors ist. Zusätzlich ist zu definieren, bezüglich welcher Achse das Quadrupolmoment zu bestimmen ist. Die Achse des Gesamtdrehimpulses gibt eine ausgezeichnete Richtung an, die in die z -Achse des raumfesten Koordinatensystems gelegt wird, d. h. es wird in den die Ladungsdichte bestimmenden Eigenfunktionen $J_z = J$ gesetzt.

Die Matrixelemente des Quadrupolmoments für die verschiedenen Einteilchenfunktionen sind im Anhang 4 in I aufgeführt.

5. Der Kern Li^7

Der experimentell bestimmte Spin des Kerns ist $I = 3/2$. Stellt man die Einteilchenfunktion nach Abschnitt 2 zu Konfigurationen des Kerns zusammen, so ergeben sich die folgenden 15 Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \{\varphi_{33}^+, \varphi_{33}^0, \varphi_{3-3}^0\}, & \Phi_2 &= \{\varphi_{33}^+, \varphi_{31}^0, \varphi_{3-1}^0\}, \\ \Phi_3 &= \{\varphi_{33}^+, \varphi_{31}^0, \varphi_{1-1}^0\}, & \Phi_4 &= \{\varphi_{33}^+, \varphi_{3-1}^0, \varphi_{11}^0\}, \\ \Phi_5 &= \{\varphi_{33}^+, \varphi_{11}^0, \varphi_{1-1}^0\}, & \Phi_6 &= \{\varphi_{31}^+, \varphi_{33}^0, \varphi_{3-1}^0\}, \\ \Phi_7 &= \{\varphi_{3-1}^+, \varphi_{33}^0, \varphi_{31}^0\}, & \Phi_8 &= \{\varphi_{31}^+, \varphi_{33}^0, \varphi_{1-1}^0\}, \\ \Phi_9 &= \{\varphi_{1-1}^+, \varphi_{33}^0, \varphi_{31}^0\}, & \Phi_{10} &= \{\varphi_{3-1}^+, \varphi_{33}^0, \varphi_{11}^0\}, \\ \Phi_{11} &= \{\varphi_{11}^+, \varphi_{33}^0, \varphi_{3-1}^0\}, & \Phi_{12} &= \{\varphi_{11}^+, \varphi_{33}^0, \varphi_{1-1}^0\}, \\ \Phi_{13} &= \{\varphi_{1-1}^+, \varphi_{33}^0, \varphi_{11}^0\}, & \Phi_{14} &= \{\varphi_{31}^+, \varphi_{31}^0, \varphi_{11}^0\}, \\ \Phi_{15} &= \{\varphi_{11}^+, \varphi_{31}^0, \varphi_{11}^0\}. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet die Klammerabkürzung eine SLATER-Determinante. Die Nukleonen der abgeschlossenen s-Schale sind in den Klammerausdrücken nicht aufgezählt.

Durch Anwendung des Drehimpulserhaltungssatzes und nach dem Isotopenspinerhaltungssatz

²⁹ A. R. EDMONDS u. B. H. FLOWERS, Proc. Roy. Soc., Lond. A **214**, 515 [1952].

³⁰ Mit I wird im folgenden auf die Dissertation des Verfassers, München 1958, verwiesen.

mischen sich diese Funktionen bei $T = 1/2$ zu

$$\begin{aligned}\Phi_1' &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\sqrt{\frac{2}{5}} (\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{1}{\sqrt{10}} [2 \Phi_6 - 2 \Phi_7 - \Phi_2 - \Phi_1] \right], \\ \Phi_2' &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{\frac{2}{5}} (\Phi_{11} + 2 \Phi_9) + \frac{1}{\sqrt{10}} (\Phi_4 - \Phi_{10} + 2 \Phi_3 - 2 \Phi_8) \right], \\ \Phi_3' &= \sqrt{\frac{3}{10}} \left[\Phi_4 + \Phi_{10} + \frac{2}{\sqrt{3}} \Phi_{14} \right], \\ \Phi_4' &= \sqrt{\frac{3}{10}} \left[\Phi_{12} + \Phi_{13} - \frac{2}{\sqrt{3}} \Phi_{15} \right], \\ \Phi_5' &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{12} - \Phi_{13}) - \sqrt{2} \Phi_5 \right].\end{aligned}$$

Mit diesen Funktionen und mit Hilfe der im Anhang der Arbeit I aufgeführten Tabellen der Matrixelemente wurde nun die Matrix der Gesamtenergie aufgestellt und deren Größe bei vier verschiedenen Werten des Deformationsparameters D bestimmt. Der Bereich der D -Werte wurde dabei aus der Annahme einer gleichförmigen Ladungsverteilung abgeschätzt.

Die Abhängigkeit der Diagonalelemente von D ist in Abb. 1 aufgetragen.

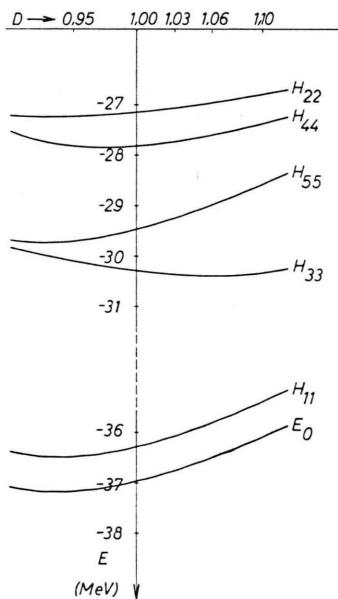


Abb. 1. Li⁷-Diagonalelemente (V_{SB}¹).

Die Energiematrizen wurden mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine diagonalisiert. Dabei ergaben sich die Eigenwerte und Eigenvektoren für den Grundzustand (für die angeregten Zustände s. Anhang der Arbeit I sowie Abb. 2 und 3).

$$\begin{aligned}D = 0,95: \quad E_0 &= -37,178 \text{ MeV}, \\ C_0 &= (+1,0000, +0,0078, +0,0498, +0,0174, -0,3356); \\ D = 1,00: \quad E_0 &= -36,962 \text{ MeV}, \\ C_0 &= (+1,0000, +0,0085, +0,0540, +0,0190, -0,3368); \\ D = 1,03: \quad E_0 &= -36,740 \text{ MeV}, \\ C_0 &= (+1,0000, +0,0099, +0,0602, +0,0218, -0,3412); \\ D = 1,06: \quad E_0 &= -36,490 \text{ MeV}, \\ C_0 &= (+1,0000, +0,0115, +0,0671, +0,0249, -0,3459).\end{aligned}$$

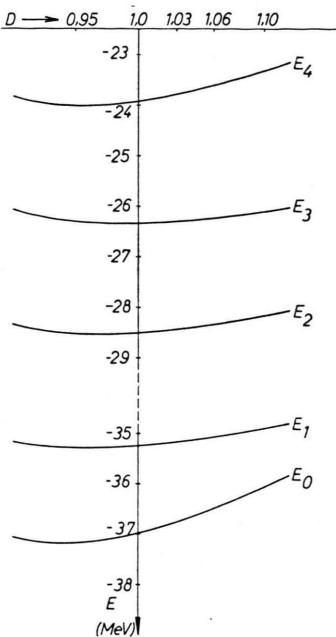


Abb. 2. Li⁷-Eigenwerte mit V_{SB}¹.

Durch numerische Interpolation wurde das Minimum der Energie im Grundzustand zu

$$E_M = -37,181 \text{ MeV} \text{ bei } D_M = +0,936$$

bestimmt, mit dem auf 1 normierten Eigenvektor $C_M = (+0,9470, +0,0072, +0,0460, +0,0160, -0,3176)$. Die Mischungskoeffizienten der Funktionen sind:

$$\begin{aligned}c_1^2 &= 0,89683, \quad c_2^2 = 0,00005, \quad c_3^2 = 0,00021, \\ c_4^2 &= 0,00026, \quad c_5^2 = 0,10087.\end{aligned}$$

Wie von SCHULTEN⁶ diskutiert, gehen auch hier die Funktionen 1 und 5 mit dem größten Gewicht ein. In diesen Funktionen sind die Einteilchenmodellfunktionen mit abgeschlossener Neutronenschale und einer Protonenfunktion φ_{33} enthalten.

Die Eigenwerte und ihre Abhängigkeit vom Deformationsparameter D sind in Abb. 2 aufgetragen, der Grundzustand außerdem auch in Abb. 1. Ersichtlich folgt der Grundzustand dem energetisch tiefsten Diagonalelement vor der Diagonalisierung. Der Wert des zum Energieminimum gehörenden

Parameters D liegt in dem Bereich, der nach der Abschätzung mit dem experimentellen Wert $Q = -1,2 \cdot 10^{-26}$ bei der Annahme gleichmäßiger Ladungsverteilung erwartet wurde.

Mit den oben angegebenen Komponenten des Eigenvektors und den Mischungskoeffizienten folgt für den Erwartungswert des Quadrupolmoments

$$\langle \Psi | Q | \Psi \rangle = -1,089 \frac{1}{\lambda_0} = -2,566 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2.$$

Bei V_{SB}^2 ergaben sich die Werte (s. Abb. 3)

$$E_M = -42,98 \text{ MeV}, D_M = 0,939, \\ c_1 = +0,9855, c_2 = -0,0279, c_3 = -0,1364, \\ c_4 = -0,0355, c_5 = -0,0914.$$

Der Erwartungswert des Quadrupolmoments ist

$$\langle Q \rangle = -2,452 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2.$$

Der experimentelle Wert des Quadrupolmoments ist nicht genau bekannt, doch scheint der negative Wert der wahrscheinlichere (s. Diskussion bei INGLIS⁵):

$$Q_{exp} = -1,2 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2.$$

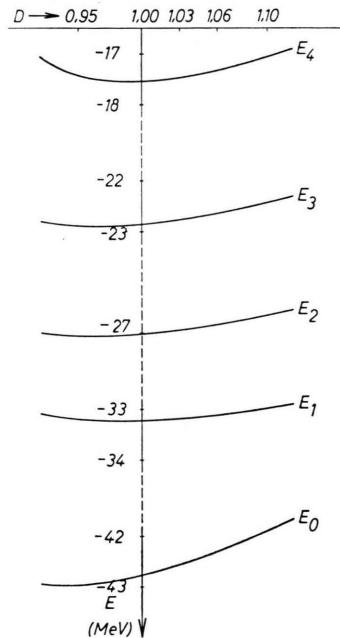


Abb. 3. Li⁷-Eigenwerte mit V_{SB}^2 .

Die berechneten Werte sind um einen Faktor 2 größer, doch ist der Betrag des experimentellen Wertes bei Li⁷ so unsicher, daß eine Verbesserung der Messung abgewartet werden muß, ehe ein Vergleich möglich ist. Die Deformation gibt eindeutig ein abgeplattetes Ellipsoid und damit ein negatives Quadrupolmoment. Dies ist wesentlich bestimmt durch die

energetisch tiefe Lage des Niveaus der Konfiguration $\{\varphi_{33}^+, \varphi_{33}^0, \varphi_{3-3}^0\}$, was zum Hauptteil durch die Spin-Bahn-Kopplung verursacht ist.

Die angeregten Niveaus lassen sich nicht mit dem Experiment vergleichen, da kein weiterer Zustand $I=3/2, T=1/2$ gefunden wurde und oberhalb 8 MeV Abstand vom Grundniveau die hier benutzte Näherung schlecht wird, da keine Zustände der höheren Schalen beigemischt sind. Die Berücksichtigung einer Tensorkraft statt der Spin-Bahn-Kopplung kann den Abstand des ersten Anregungsniveaus $^2P_{1/2}$ gut erklären³¹, doch gelingt dies auch mit V_{SB}^2 (s. Anm. 8).

Die Bindungsenergie ist um 10% zu groß.

6. Der Kern Li⁶

Der experimentell bestimmte Spin ist $I=1$. Die benutzten Konfigurationen sind in Arbeit I angeführt.

Aus der Eigenwertbestimmung ergeben sich die Kurven der Abb. 4, die die Abhängigkeit der Eigenwerte von D wiedergeben.

Das Minimum der Energie des Grundzustandes wurde bei

$$D_M = +1,0036 \text{ zu } E_M = -35,720 \text{ MeV} \text{ bestimmt.}$$

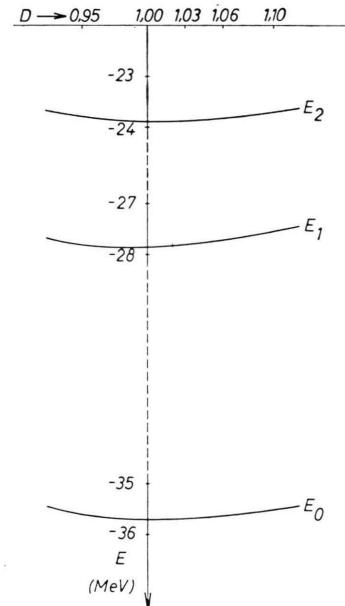


Abb. 4. Li⁶-Eigenwerte mit V_{SB}^1 .

³¹ A. M. FEINGOLD, Phys. Rev. **101**, 258 [1957].

Die Komponenten des zugehörigen Eigenvektors sind
 $C_0 = (c_1, c_2, c_3)$:

$$c_1 = +0,6812, \quad c_2 = -0,6692, \quad c_3 = +0,2967.$$

Der Erwartungswert des Quadrupolmoments wird

$$\langle Q \rangle = +0,34 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2.$$

Die Rechnung mit V_{SB}^2 ergab für den Grundzustand (s. Abb. 5)

$$E_M = -36,65 \text{ MeV} \text{ bei } D_M = 1,022$$

mit den Komponenten des Eigenvektors

$$c_1 = +0,7891, \quad c_2 = -0,5957, \quad c_3 = +0,1497.$$

Hiermit wird der Erwartungswert des Quadrupolmoments

$$\langle Q \rangle = +0,38 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2.$$

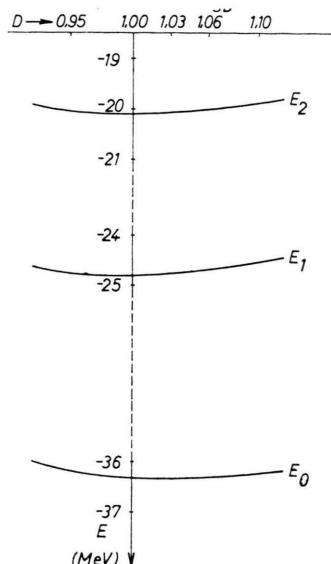


Abb. 5. Li⁶-Eigenwerte mit V_{SB}^2 .

Beide Werte des Quadrupolmoments sind kleiner als die früher^{3, 8} gefundenen. Der experimentelle Wert ist nicht genau bekannt, wird aber $< +0,1 \cdot 10^{-26}$ cm² angenommen.

OTSUKI und Mitarbeiter³² fanden bei der Rechnung mit einem symmetrischen pseudoskalaren Mesonpotential einen negativen Wert für Q , der $< -0,1 \cdot 10^{-26}$ cm² ist, bei der Annahme einer starken Spin – Bahn-Kopplung (8,5 MeV). Es konnten die Niveaus bei 2,19; 3,58 und 5,3 MeV erklärt werden. Dahingegen fand KURATH⁸, daß keine gute Übereinstimmung mit den experimentell

³² S. OTSUKI, T. SAWADE u. S. SUEKANE, Progr. Theor. Phys. Japan **13**, 79 [1955].

³³ N. ZELDES, Phys. Rev. **90**, 416 [1953].

bestimmten Anregungszuständen gefunden wird, wenn das Verhältnis von Einteilchen-Spin – Bahn-Kopplung zu Austauschkraft a/K , das ein Maß für die „intermediate coupling“ zwischen den Extremen LS- und jj-Kopplung ist, zu 1,6 gewählt wird, was bei gleicher Reichweite einem Wert – 1,92 MeV für die Tiefe des Potentials der Spin – Bahn-Kopplung entspricht ($K = -1,2$). Es existieren verschiedene Arbeiten³³, die bei Li⁶ eine unterschiedliche Anwendbarkeit der mittleren Kopplung finden. Auch ein α – d-Modell wird diskutiert⁴.

Hier ist $a/K = 2,1$. Die gefundenen Niveaus für $I = 1$, $T = 0$ geben die Erfahrung schlecht wieder. Bei V_{SB}^1 liegt der erste Anregungszustand zu hoch. Bei V_{SB}^2 ist das erste Niveau bei 1,55 MeV, im Experiment aber bei 3,57 MeV. Das Ergebnis bestätigt also die Ergebnisse von HÜPER⁸ für Li⁶.

Eine Berücksichtigung von Tensorkräften³¹ zeigt hier im Gegensatz zu Li⁷ ein schlechtes Ergebnis (s-Doublett-Abstand 1,4 MeV statt 2,189 experimentell).

Das Verhältnis Q_{Li^6}/Q_{Li^7} ist genauer bekannt als die Einzelwerte, da die oben angeführte Schwierigkeit der Bestimmung des elektrischen Feldes nicht eingeht. KUSCH³⁴ bestimmte es zu $\leq 0,04$. Hier ist

$$\frac{Q_{Li^6}}{Q_{Li^7}} = \begin{cases} 0,13 & \text{bei } V_{SB}^1, \\ 0,15 & \text{bei } V_{SB}^2 \end{cases}$$

und ist zu groß.

Der Grund ist das zu groß gefundene Quadrupolmoment für Li⁶, der es wahrscheinlich macht, daß eine Beschreibung im α – d-Modell für diesen Kern angepaßter ist (s. Diskussion bei INCLIS⁵).

Die experimentell bestimmte Bindungsenergie³⁵ ist $E_B = +31,99$ MeV, der obige Wert also um 14% zu groß.

7. Der Kern Be⁹

Der experimentelle Spin ist $I = 3/2$. Die benutzten Konfigurationen sind in Arbeit I aufgeführt.

Der Gang des Grundzustandes und der angeregten Niveaus mit dem Deformationsparameter ist aus Abb. 6 ersichtlich.

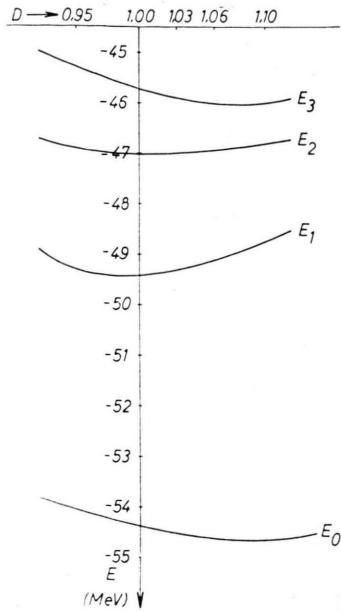
Das Energieminimum liegt bei

$$D_M = +1,0902$$

und beträgt $E_M = -54,684$ MeV.

³⁴ P. KUSCH, Phys. Rev. **76**, 138 [1949].

³⁵ J. MATTIAUCH, L. WALDMANN, R. BIERI u. F. EVERLING, Ann. Rev. Nucl. Sci. **6**, 179 [1956].

Abb. 6. Be^9 -Eigenwerte mit V_{SB}^1 .

Die Komponenten des Eigenvektors sind

$$\begin{aligned} c_1 &= +0,8611, & c_2 &= +0,0016, \\ c_3 &= -0,1606, & c_4 &= -0,4821. \end{aligned}$$

Auch hier sind die nach dem Einteilchenmodell zu erwartenden Funktionen mit sehr starkem Anteil vertreten ($\sim 97\%$).

Es folgt für den Erwartungswert des Quadrupolmoments

$$\langle Q \rangle = + \frac{0,5293}{\lambda_0} = + 2,683 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2.$$

Die Werte für V_{SB}^2 sind (s. Abb. 7)

$$\begin{aligned} D_M &= +1,0663, & E_M &= -60,80 \text{ MeV}, \\ c_1 &= +0,8602, & c_2 &= -0,1208, \\ c_3 &= +0,4085, & c_4 &= -0,2804. \end{aligned}$$

Der Erwartungswert des Quadrupolmoments wird hiermit

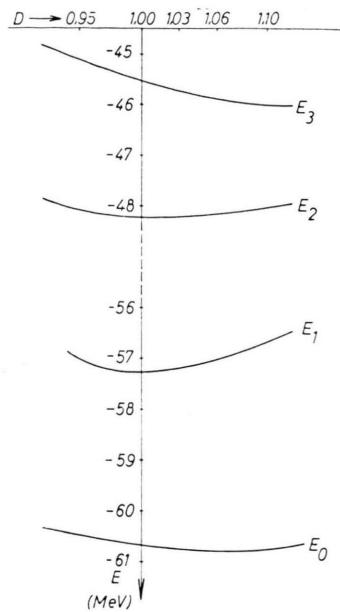
$$\langle Q \rangle = + 2,002 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2.$$

Der experimentelle Wert ist

$$Q_{\text{exp}} = + 2 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$$

und wird durch V_{SB}^2 besser wiedergegeben.

Die Niveaus lassen sich aus mangelnder experimenteller Indizierung nicht vergleichen. Die experimentelle Bindungsenergie ist $E_B^{\text{exp}} = 58,156 \text{ MeV}$ und die hier berechneten Werte liegen zu tief bzw. zu hoch. Das liegt an der starken Änderung des Niveaus der Konfiguration 1 (s. Arbeit I) durch die geänderte Spin-Bahn-Kopplung, $V_0^2 b_2^2 / V_0^1 b_1^2$

Abb. 7. Be^9 -Eigenwerte mit V_{SB}^2 .

$= 1,9$, wobei $b^2 V_0$ als Maß für die Stärke des Potentials genommen wurde.

8. Der Kern N^{14}

Der experimentell bestimmte Spin ist $I = 1$. Die Konfigurationen sind in Arbeit I aufgeführt. Den Gang der Eigenwerte mit D gibt Abb. 8.

Das Energieminimum liegt bei $D_M = +1,0213$ und sein Wert ist $E_M = -131,772 \text{ MeV}$.

Die zugehörigen Koeffizienten sind

$$c_1 = +0,5404, \quad c_2 = -0,6997, \quad c_3 = +0,4668.$$

Der Erwartungswert des Quadrupolmoments ist

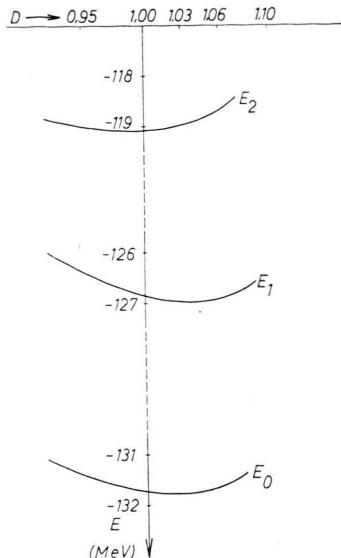
$$\langle Q \rangle = + 0,9337 \frac{1}{\lambda_0} = + 2,615 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2.$$

Die Werte für V_{SB}^2 sind (s. Abb. 9)

$$\begin{aligned} D_M &= +1,030, & E_M &= -142,28 \text{ MeV}, \\ c_1 &= +0,1025, & c_2 &= -0,0943, \quad c_3 = +0,9903. \end{aligned}$$

Hiermit folgt $\langle Q \rangle = + 1,634 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$.

Die große Differenz der beiden Quadrupolmomentwerte sowie der Eigenvektoren wird durch die starke Änderung des Niveaus der Konfiguration Φ_3 mit der Spin-Bahn-Kopplung verursacht. Daß zu einem größeren Wert des Deformationsparameters ein kleineres Quadrupolmoment berechnet wird, liegt an dem Anteil des Quadrupolmoments, der schon bei Kugelsymmetrie ($D=1$) vorhanden ist. Die Funktionen, die eine maximale Anzahl von Oszillatorkräften φ_{3i} enthalten, bekommen durch die stärkere Spin-Bahn-Kopplung V_{SB}^2

Abb. 8. N^{14} -Eigenwerte mit V_{SB}^1 .

die größte Änderung des Gewichts (c_k). Da der z -Anteil der Dichtevertteilung der Funktionen $\varphi_{3\pm3}$ gegenüber den x, y -Anteilen überwiegt, muß der positive Erwartungswert des Quadrupolmoments bei V_{SB}^2 kleiner werden (s. a. bei Be⁹).

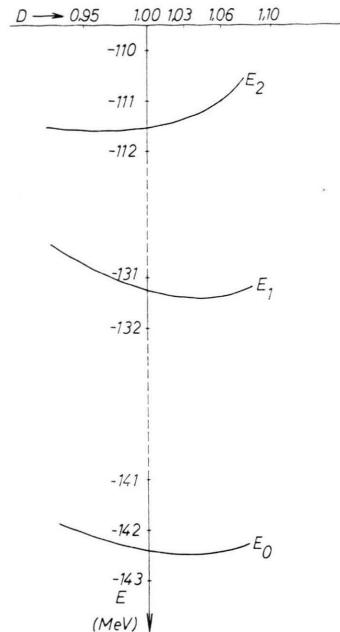
Der experimentelle Wert für Q ist

$$Q_{\text{exp}} = +2 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2.$$

Da der Fehlerbereich der Messung nicht angegeben wurde, kann keine Bewertung der berechneten Daten erfolgen. Der Vergleich mit den experimentell gefundenen Niveaus bei 3,95 und 5,10 MeV zeigt eine schlechte Näherung für V_{SB}^2 , bei V_{SB}^1 liegt das erste Niveau bei 4,80 MeV, das zweite bei 12,79 MeV, ist also auch nicht befriedigend. Allerdings ist der Spin des 3,95 MeV-Niveaus noch zweifelhaft.

9. Zusammenfassung

Das hier verwendete Vielteilchen-Schalenmodell kann eine Abweichung der Dichtevertteilung der Nukleonen von der sphärisch-symmetrischen Form erklären, die in dem aus Quadrupolmomentmessungen erwarteten Bereich liegt. Wesentlich hierfür war eine weitgehende Berücksichtigung von Konfigurationsmischungen. Das Verfahren zeigte sich sehr empfindlich gegenüber der Vernachlässigung von Konfigurationen. Rechnungen mit dem Grundzustand des Einteilchen-Schalenmodells ergaben um Größenordnungen falsche Werte.

Abb. 9. N^{14} -Eigenwerte mit V_{SB}^2 .

Bei den elektrischen Quadrupolmomenten konnten Verbesserungen gegenüber den Ergebnissen von SCHULTEN und HÜPER erzielt werden. Die berechneten Werte liegen innerhalb der Fehlergrenzen der Meßergebnisse.

Eine Entscheidung zugunsten einer der beiden verwendeten Spin-Bahn-Kopplungen konnte aus dem Deformationsverhalten sowie aus der Lage der Anregungsniveaus nicht getroffen werden. Die berechneten Niveaus stimmen nur schlecht mit der Erfahrung überein, obgleich die verwendeten Parameter für die Potentiale im Bereich der *intermediate coupling* liegen.

Herrn Prof. F. BOPP danke ich für die Überlassung der Arbeit und Herrn Dr. F. BECK für viele fördernde Diskussionen. Für die Hilfe beim Diagonalisieren der Matrizen danke ich Herrn Dr. URIC und der PERM, Techn. Hochschule München sowie der IBM in Sindelfingen, insbesondere Herrn Dr. HESSE.

Anhang

Zum Fehler durch die nur unvollkommene Berücksichtigung der Drehimpulserhaltung

Die Gleichung

$$\bar{J}^+ \Psi_{J, J_z=J} = 0 \quad (\text{A } 1)$$

ist streng nur erfüllt für $D = 1$,

d. h.

$$\Psi_{J,J_z} = \sum_{n=1}^{f_0} c_n \Phi_{J_z}^n \quad (\text{A } 2)$$

ist bei kugelsymmetrischem Potential eine Eigenfunktion des Gesamtdrehimpulses. Die Größe von f_0 ist durch die hier vorgenommene Beschränkung auf Einteilchenfunktionen³⁶ φ_{j,j_z}^k der s- und p-Schale bestimmt.

Im elliptisch deformierten Potential ist nur die Komponente des Drehimpulses, die mit der Rotationsachse zusammenfällt, eine Erhaltungsgröße. Bei den hier erwarteten kleinen Abweichungen von der sphärischen Symmetrie wird jedoch Ψ näherungsweise als Eigenfunktion des Gesamtdrehimpulses angenommen. Es ist jetzt abzuschätzen, wie groß der Einfluß von Funktionen

$\Phi_{J_z}^n$ ($n > f_0$), in denen Einteilchenfunktionen φ_{j,j_z}^k aus höheren Schalen stehen, in einer erweiterten Entwicklung analog (2), die aber jetzt auch für $D \neq 1$ strenge Drehimpulseigenfunktion sein soll, bei der Bestimmung der Mischungskoeffizienten c_n wird.

An Stelle von Gl. (A 2) wird folgender Ansatz gemacht:

$$\Psi_{J,J_z} = \sum_{n=1}^{f_0} c_n \Phi_{J_z}^n + \alpha \sum_{n=f_0+1}^{f_1} c_n \Phi_{J_z}^n + \alpha^2 \sum_{n=f_1+1}^{f_2} c_n \Phi_{J_z}^n + \dots, \quad (\text{A } 3)$$

wobei in den Determinanten $\Phi_{f_0+1}^1, \Phi_{f_0+2}^1, \dots, \Phi_{f_1}^1$ Einteilchenfunktionen der s-, p- und f-Schale, in den $\Phi_{f_1+1}^1, \dots, \Phi_{f_2}^1$ solche der s-, p-, f- und h-Schale usw. stehen sollen und $\alpha = \lambda - \lambda_z$ ist. Der Ansatz wird aus dem folgenden verständlich.

Bei Anwendung des Operators J^+ = $\sum_{i=1}^A j^+(i)$ auf Ψ_{J,J_z} wird

$$\bar{J}^+ \Psi_{J,J_z} = \sum_{n=1}^{f_0} c_n \sum_{i=1}^A j^+(i) \Phi_{J_z}^n + \alpha \sum_{n=f_0+1}^{f_1} c_n \sum_{i=1}^A j^+(i) \Phi_{J_z}^n + \dots. \quad (\text{A } 4)$$

Die Anwendung von $j^+(i)$ auf die Einteilchenfunktion φ_{j,j_z}^k gibt

$$j^+(i) \varphi_{j,j_z}^k(i) = \hbar \varphi_{j,j_z+1}^k(i) + \alpha \hbar f_{(i)}^{k,j,j_z}, \quad (\text{A } 5)$$

wo die $f_{(i)}^{k,j,j_z}$ durch die Einteilchenfunktion der j -ten und $j+2$ -ten Schale darstellbar sind³⁷.

Damit wird³⁸

$$j^+(i) \Phi_{J_z}^n = \hbar I_{J_z+1}^m + \alpha \hbar \left\{ \sum_{k=1}^{t_1} \beta_k^n I_{J_z}^k + \sum_{l=1}^{t_2} \gamma_l^n I_{J_z+2}^l \right\} \quad (\text{A } 6)$$

und

$$\sum_{i=1}^A j^+(i) \Phi_{J_z}^n = \hbar \sum_{m=1}^{d_0} a_m^n I_{J_z+1}^m + \alpha \hbar \left\{ \sum_{k=1}^{d_1} b_k^n I_{J_z}^k + \sum_{l=1}^{d_2} g_l^n I_{J_z+2}^l \right\}, \quad (\text{A } 7)$$

$$\begin{aligned} J^+ \Psi_{J,J_z} &= \hbar \sum_{m=1}^{d_0} \left(\sum_{n=1}^{f_0} a_m^n c_n \right) I_{J_z+1}^m + \alpha \hbar \left\{ \sum_{k=1}^{d_1} \left(\sum_{n=1}^{f_0} b_k^n c_n \right) I_{J_z}^k + \sum_{l=1}^{d_2} \left(\sum_{n=1}^{f_1} g_l^n c_n \right) I_{J_z+2}^l \right\} \\ &\quad + \alpha \hbar \sum_{m=1}^{d_3} \left(\sum_{n=f_0+1}^{f_0} a_m^n c_n \right) I_{J_z+1}^m + \alpha^2 \hbar \left\{ \sum_{k=1}^{d_4} \left(\sum_{n=f_0+1}^{f_1} b_k^n c_n \right) I_{J_z}^k + \sum_{l=1}^{d_5} \left(\sum_{n=f_0+1}^{f_1} g_l^n c_n \right) I_{J_z+2}^l \right\}. \\ &\quad + \alpha^2 \hbar \sum_{m=1}^{d_6} \left(\sum_{n=f_1+1}^{f_2} a_m^n c_n \right) I_{J_z+1}^m + \alpha^3 \dots \\ &= \hbar \sum_{m=1}^{D_0} \left(\sum_{n=1}^{f_0} a_m^n c_n + \alpha \sum_{n=f_0+1}^{f_1} a_m^n c_n + \alpha^2 \sum_{n=f_1+1}^{f_2} a_m^n c_n + \dots \right) I_{J_z+1}^m \\ &\quad + \alpha \hbar \sum_{k=1}^{D_1} \left(\sum_{n=1}^{f_0} b_k^n c_n + \alpha \sum_{n=f_0+1}^{f_1} b_k^n c_n + \alpha^2 \sum_{n=f_1+1}^{f_2} b_k^n c_n + \dots \right) I_{J_z}^k \\ &\quad + \alpha \hbar \sum_{l=1}^{D_2} \left(\sum_{n=1}^{f_0} g_l^n c_n + \alpha \sum_{n=f_0+1}^{f_1} g_l^n c_n + \alpha^2 \sum_{n=f_1+1}^{f_2} g_l^n c_n + \dots \right) I_{J_z+2}^l + \alpha^2 \dots = 0. \end{aligned} \quad (\text{A } 8)$$

³⁶ Hier ist abweichend von Abschnitt 2 der Index k zur Kennzeichnung der Funktion benutzt, während die Indizes j und j_z angeben, daß die Funktion eine Eigenlösung der Operatoren j^2 und j_z im Fall $D=1$ ist.

³⁷ Dies folgt aus den Rekursionsformeln für HERMITESCHE Polynome:

$$\begin{aligned} z H_n(z) &= n H_{n-1}(z) + \frac{1}{2} H_{n+1}(z), \\ \frac{d}{dz} [e^{-z^2} H_n(z)] &= -2 e^{-z^2} H_{n+1}(z). \end{aligned}$$

³⁸ Die I sind keine SLATER-Determinanten.

Da die Funktionen Γ orthogonal sind, werden aus Gl. (A 8) Relationen zwischen den c_n erhalten. Dadurch treten in den Funktionen

$$\Phi_{J_z}^i = \sum_{n=1}^s c_n^{i'} \Phi_{J_z}^n = \sum_{n=1}^{f_0} c_n^{i''} \Phi_{J_z}^n + \alpha \sum_{n=f_0+1}^{f'} c_n^{i''} \Phi_{J_z}^n + \alpha^2 \dots \quad (\text{A } 9)$$

Koeffizienten $c_n^{i'}$ auf, von denen einige mit Potenzen von α eingehen werden. Ersichtlich gehen die Konfigurationen $\Phi_{J_z}^n$ mit $n > f_0$ mit einem Koeffizienten ein, der mindestens proportional α ist. Der Fehler, der bei Vernachlässigung dieser Konfigurationen gemacht wird, wird über die Energimatrix abgeschätzt. Für die Änderung der Energie bei Deformation sind die Diagonalelemente bestimmt.

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{J_z}^i | H | \Phi_{J_z}^i \rangle &= \sum_{n=1}^{f_0} (c_n^{i''})^2 \langle \Phi_{J_z}^n | H | \Phi_{J_z}^n \rangle + \sum_{n=1}^{f_0} \sum_{m=1}^{f_0} (c_n^{i''} c_m^{i''}) \langle \Phi_{J_z}^n | H | \Phi_{J_z}^m \rangle \\ &\quad + \alpha \sum_{m=1}^{f_0} \sum_{n=f_0+1}^{f'} (c_n^{i''} c_m^{i''}) \langle \Phi_{J_z}^n | H | \Phi_{J_z}^m \rangle + \alpha^2 \sum_{n=f_0+1}^{f'} (c_n^{i''})^2 \langle \Phi_{J_z}^n | H | \Phi_{J_z}^n \rangle \\ &\quad + \alpha^2 \sum_{n=1}^{f_0} \sum_{m=f'+1}^{f''} (c_n^{i''} c_m^{i''}) \langle \Phi_{J_z}^n | H | \Phi_{J_z}^m \rangle + \alpha^3 \dots . \end{aligned} \quad (\text{A } 10)$$

Im ungünstigsten Fall (N¹⁴) sind die Diagonalelemente von der Größenordnung 100 MeV, die Übergangselemente 0,5 MeV. Die Änderung der Diagonalelemente mit D von dem Wert $D=1$ bis $D=D_m$ ist 0,5 MeV. Dabei ändert sich α von dem Wert 0 auf 10^{-2} .

Der Einfluß des in α linearen Nichtdiagonalgliedes ist somit 1% und der des in α quadratischen diagonalen 2%. Beschränkt man die Funktionen der Anregungskonfigurationen auf die p- und f-Schale, so bleibt bei $f_0 < 20$ der Fehler < 20%. Das bedeutet für die Minimumdeformation $D_m = 1,03 \pm 0,006$. Der Einfluß auf das Minimum ist also von der Größe der durch die unterschiedlichen Spin-Bahn-Kopplung bewirkten Änderung.

NOTIZEN

Zur Theorie des Masers

Von E. GROSCHWITZ

Wernerwerk für Bauelemente der Siemens & Halske AG,
München

(Z. Naturforschg. 14 a, 305—307 [1959]; eingeg. am 3. Dezember 1958)

Die Bezeichnung Maser¹ bezieht sich auf ein neuartiges Prinzip der Verstärkung elektromagnetischer Wellen im Mikrowellengebiet. Es handelt sich um einen quantenmechanischen Verstärker, wobei die innere Energie angeregter Zustände in einem Gas oder festen Körper durch induzierte Emission an das Mikrowellenfeld abgegeben wird und dieses verstärkt². Diese stimulierte Mikrowellenstrahlung ist kohärent, d. h. sie ist durch feste Phasenbeziehungen der induzierten Emission und der diese Strahlung erzeugenden äußeren, zu verstärkenden Primärwelle gekennzeichnet. Hieraus resultiert Interferenzfähigkeit der Mikrowellenstrahlung des Masers.

Den Ausgangspunkt für eine Erörterung der physikalischen und technischen Eigenschaften des Masers bilden

die Übergangswahrscheinlichkeiten für die erzwungenen Emissions- und Absorptionsprozesse. In der Literatur zum Problemkreis des Masers wurde bei der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten in der elektromagnetischen Störungsenergie nur eine einzige Schwingungskomponente der aufgeprägten Strahlung verwendet. Die durch die Kohärenz bedingte Phasenkonfiguration des Feldes wird hierbei jedoch nicht in Betracht gezogen.

In der vorliegenden Arbeit wird deshalb die Frage der induzierten Emission und Absorption eines atomaren Systems, das mit einem Mikrowellenfeld resonanzfähig ist, unter Berücksichtigung der Phasenkonfiguration des Feldes untersucht. Das Gesamtfeld besteht aus endlich vielen Schwingungskomponenten. (Die Anzahl der Schwingungskomponenten soll mindestens zwei betragen, wobei die eine dem äußeren Primärfeld und die andere dem emittierten Sekundärfeld entspricht.) Die Schwingungskomponenten setzen wir in dem behandelten Beispiel monochromatisch an, sie unterscheiden sich aber durch die Größe der Amplituden des elektrischen bzw. magnetischen Feldes und insbesondere durch ihre Phasenlagen. Dieser Feldansatz entspricht den

¹ MASER, Abkürzung für Microwave amplifier by stimulated Emission of radiation.

² J. P. WITTKE, Proc. Inst. Radio Engrs. **45**, 291 [1957]. — RCA Rev. Vol. XVIII, No. 4, Dezember 1957. — J. P. GORDON, H. J. ZEIGER u. C. H. TOWNES, Phys. Rev. **99**, 1264 [1955]. — K. SHIMODA, T. C. WANG u. C. H. TOWNES, Phys.

Rev. **102**, 1308 [1956]. — N. BLOEMBERGEN, Phys. Rev. **104**, 326 [1956]. — J. P. GORDON, Phys. Rev. **99**, 1253 [1955]. — C. H. TOWNES, J. Appl. Phys. **28**, 920 [1957]. — L. E. NORTON, Inst. Radio Engrs. Trans. Vol. MTT-5, No. 4, Oktober 1957.